

第3章 ベクトルの微分法

キーワード

ベクトル、ベクトルの演算、ゼロベクトル、マイナスのベクトル、ベクトルの定数倍、定数ベクトル、関数ベクトル、ベクトルの成分表示、ベクトルの微分法、速度ベクトル、加速度ベクトル、極率、極率半径、ベクトルのスカラー積、ベクトル積、

3.1 ベクトルの演算

1kgの質量や 2m^3 の体積などのように量で与えるものをスカラーと呼ぶ。これに対し、北東の風、風速 2m/s のように方向と大きさで与えるものをベクトルと呼ぶ。方向と大きさで与えられるものは他に速度、加速度、力、電場、磁場など物理学の中で多用されている。質点の力学においては、質点の位置を与える位置ベクトル、また、位置の変化を与える変位ベクトルなどが登場する。ここで始めに位置ベクトル \mathbf{r} を例に取る（ベクトルは太字で表記することが多い）。位置ベクトルは、ある、決められた原点から質点まで引いた矢印で与えられる。もともとベクトルとは矢印で与えるものだから座標系をどのようにとっても矢印は矢印なので変わらない。これはベクトルの重要な性質である。ただ、ベクトルの成分を見ると、それは座標系の取り方で変わる。後述するが、ベクトルの成分とはベクトルの表し方、つまり見え方であり、どのような座標系から見るかにより見え方が違ってくるが、ベクトルそのものは座標系の取り方で変わらない。そういう観点からすれば位置ベクトルは矢印の基点を指定しているので特殊なベクトルであるが、位置ベクトルの変化分である変位ベクトルは座標系の取り方に依存しない。

ここで、ベクトルどうしの基本演算を与える。とりあえず座標系を使用しないで（意識しないで）、ベクトルを空間に描いた矢印で与える。ベクトル \mathbf{A} が与えられたとき、このベクトルの長さを α 倍したベクトルを $\alpha\mathbf{A}$ として表記する。つまり、ベクトルのスカラー倍の意味と表記法である。したがって、もし $\alpha = -1$ なら $-\mathbf{A}$ を与えるがこれは元のベクトルと大きさが等しく、向きが正反対のベクトルを与える。 $\alpha = 0$ のときはベクトル $\mathbf{0}$ を与え、これは長さがゼロなのでゼロベクトルと呼ぶ。

次にもう一つ別のベクトル \mathbf{B} を書いてみる。ベクトルはそもそも方向と大きさを規定した量なので、ベクトルを空間内で平行移動しても同じベクトルとされる。したがって、 \mathbf{B} の始点を \mathbf{A} の終点につなげて書く。このとき、 \mathbf{A} の始点から \mathbf{B} の終点まで引いた矢印で与えるベクトルを \mathbf{C} と書けば、 \mathbf{C} を \mathbf{A} と \mathbf{B} の和といい（正確にはベクトル和）次のように表記される。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (3.1)$$

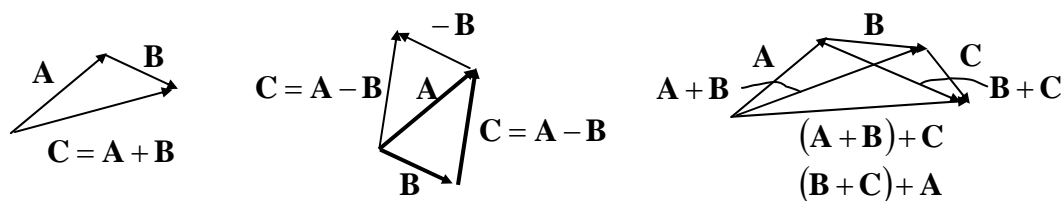


図3.1 ベクトルの演算

ベクトルの和が定義されたのであるからベクトルの差も考えられる。もともとスカラー量 a と b の差はどのようにして定められたかという、

$$a - b = a + (-b)$$

を与える量である。同様に考えベクトル \mathbf{A} からベクトル \mathbf{B} を引いたものもベクトルであり、これを \mathbf{C} と書き次の表記法で表す。

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (3.2)$$

次に、この意味を考える。図 3.1 に示すように $-\mathbf{B}$ はベクトル \mathbf{B} の向きを逆にしたベクトルである。このベクトルの始点をベクトル \mathbf{A} の終点に置いて描き、 \mathbf{A} の始点から $-\mathbf{B}$ の終点まで引いた矢印でベクトル \mathbf{C} を与える。これが、ベクトルの差に対する図形的な意味である。ベクトルの差は物理学で頻出するのでもう少し覚えやすいように理解したほうが良い。ベクトル \mathbf{B} の始点をベクトル \mathbf{A} の始点に重ねて書く。ベクトル $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ は、その始点が \mathbf{A} と \mathbf{B} の始点と同じ位置にあるように描けるが、これを平行移動して始点を \mathbf{B} の終点に置くようにする。そうすればベクトル $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ の終点はベクトル \mathbf{A} の終点に置かれる。この表記法は重要で、言葉で表すとベクトル同士の差を与えるベクトルは、引くベクトルの終点から引かれるベクトルの終点までの矢印で表現される。

スカラー量と同様にベクトルも次の法則が成り立つ。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交換則}) \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (\text{結合則}) \quad (3.4)$$

3.2 ベクトルの積

ベクトル同士の積として2種類が定義されている。それらは、物理学の中で非常に重要な意味を持つ。

(1) スカラー積

二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} のなす角度を θ とする。このとき、次式で定義されるスカラー量をベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} のスカラー積という。

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \quad (3.5)$$

スカラー積は記号

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (3.6)$$

で表す。

スカラー積は角度 θ により $-|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ から $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ までの値をとる。物理学で用いられるスカラー積の例は力 \mathbf{F} が質点の変位 \mathbf{s} で行う仕事 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ などである。

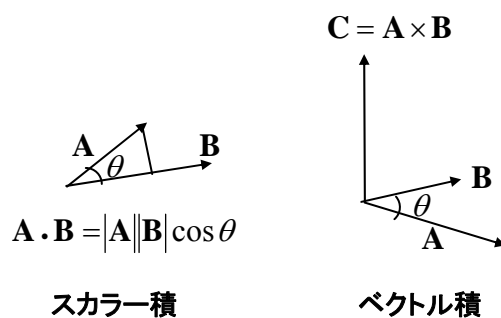


図3.2 スカラー積およびベクトル積

問 ベクトル \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} に対して、次の分配の法則が成り立つことを図形的に証明しなさい。

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (3.7)$$

(2)ベクトル積

二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} から別のベクトル \mathbf{C} を図のようにして作成したとき、 \mathbf{C} は \mathbf{A} と \mathbf{B} のベクトル積と呼ばれる。式では

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (3.8)$$

と書き、この式で与えられたベクトル \mathbf{C} はベクトル \mathbf{A} をベクトル \mathbf{B} の方向へまわしたとき、右ねじが進む方向を向くベクトルであり、その大きさは

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad (3.9)$$

で与えられるものとする。 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ をエークロスビーと呼ぶ。ベクトル積には次の関係がある。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (3.10)$$

問 ベクトル積について次の分配法則が成り立つことを図形的に証明しなさい。

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (3.11)$$

ベクトル積が力学で使われる例は、物体中で位置ベクトル \mathbf{r} により与えられる場所に働く力 \mathbf{F} のモーメント

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.12)$$

や、磁束密度 \mathbf{B} の中を速度 \mathbf{v} で運動する e クーロンの電荷が受けるローレンツ力

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.13)$$

などである。

幾何学で用いられる例としては、平面の面積および、スカラー積との組み合わせで平行 6 面体の体積の表現である。式(3.9)によればベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の大きさはベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} で張られる平行四辺形の面積を与える。それでは、ベクトル積の向きはどうであろうか。明らかに、ベクトル積の向きはこの平行四辺形に垂直である。したがって、ベクトル積により平行四辺形の面がどのように傾いているか、そして面積はどれだけかを示すことができる。今の場合、ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は面積ベクトルと呼ばれる。この平行四辺形の傾いている方向を特徴づけるものとして、面に垂直で長さが 1 のベクトル、**法線ベクトル**が次式として与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} \quad (3.14)$$

さらに、次のスカラー量 (**スカラー3重積**)

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.15)$$

の意味を考えてみる。図 3.3 に示すように、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} および \mathbf{C} が張る平行六面体について考える。ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ はこの平行六面体の底面を表す面積ベクトルである。ところで、ベクトル \mathbf{C} と面積ベクトルとのスカラー積は面積ベクトルの大きさ、つまり底面の面積と底面に立てた法線への \mathbf{C} の射影、つまり立体の高さ、との積である。これは立体の体積に他ならない。つまり式(3.15)は 3 つのベクトルで張られる平行六面体の体積を与える。このこ

とは、式(3.14)を式(3.15)に直接代入して確かめることができる。まず、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \mathbf{n}$ であるから、

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| h = V \quad (3.16)$$

となる。スカラー3重積には次の関係があり、幾何学的に明らかである。

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (3.17)$$

これは3つのベクトルがサイクリックに並んでいるので覚えやすい。

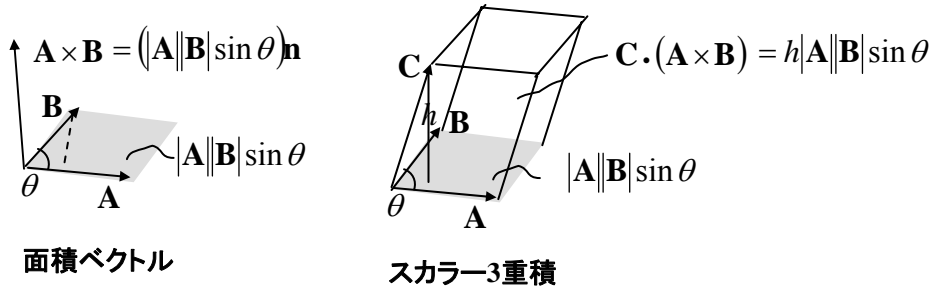


図3.3ベクトル積の幾何学的意味

3.3 ベクトルの成分表示

ベクトル \mathbf{A} を x, y, z 座標系の原点から引いた矢印で与えるとする。このとき、 x, y, z の各座標軸の方向に向いた長さが 1 であるベクトルを使うと便利である。これらのベクトルを単位ベクトルという。スカラー量の世界における単位量に相当し、例えば 1 単位の質量を 1kg、1 単位の温度を 1 K などと呼ぶことに対応する。この単位量の 2 倍の質量を 2kg と呼ぶ。これと同様に、ベクトル

$$\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \quad (3.18)$$

をそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルと呼ぶ。この単位ベクトルを使っていくつかのベクトルを表してみる。

x 軸方向の長さ 3 のベクトル :	$3\mathbf{i}$
x 軸方向の長さが 3 で方向が負であるベクトル :	$-3\mathbf{i}$
x 軸方向の単位ベクトルを a 倍したベクトル :	$a\mathbf{i}$
y 軸方向の単位ベクトルを b 倍したベクトル :	$b\mathbf{j}$
x 軸方向の単位ベクトルを a 倍したベクトルと	
y 軸方向の単位ベクトルを b 倍したベクトルの和のベクトル :	$a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$
これにさらに z 方向の単位ベクトルの c 倍したベクトルの和 :	$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

これらの単位ベクトルを用いて、任意のベクトルを表してみよう。

x 軸方向のベクトルで矢印の先端が x であるベクトル :	$x\mathbf{i}$
y 軸方向のベクトルで矢印の先端が y であるベクトル :	$y\mathbf{j}$
z 軸方向のベクトルで矢印の先端が z であるベクトル :	$z\mathbf{k}$

ベクトル \mathbf{r} の先端の位置座標をそれぞれ x, y, z とする。このとき、 \mathbf{r} は単位ベクトルを用いて、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.19)$$

と表される。

したがって、ベクトルを成分で与えれば、

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

単位ベクトルで表せば、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.20)$$

と表現できる。

単位ベクトルを用いてベクトルの演算を表現してみよう。

ここで、2つのベクトル $\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{B} = (b_x, b_y, b_z)$ の演算を考える。

ベクトルの和：

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) + (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} \quad (3.21)$$

これを成分だけで表すと

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad (3.22)$$

ベクトルの定数倍：

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \alpha a_x\mathbf{i} + \alpha a_y\mathbf{j} + \alpha a_z\mathbf{k} \quad (3.23)$$

これを成分で表すと：

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_x, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z) \quad (3.24)$$

2つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} のスカラー積を表してみる。まず、単位ベクトル同士のスカラー積は次のようになる。

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \end{array} \quad (3.25)$$

つまり、同じものどうしの積は1で異なるものどうしでは0である。

つぎに、 $\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ および $\mathbf{B} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ とすると

この2つのベクトルのスカラー積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.26)$$

つまり、各ベクトルの同じ成分同士のスカラー積の和で与えられる。

もう一つのベクトルを $\mathbf{C} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$ とすると、つぎの分配法則が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= ((a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}) \cdot (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) \\ &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) + (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \end{aligned} \quad (3.27)$$

問 ベクトル $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$ と $\mathbf{B} = (3, 2, 1)$ のスカラー積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ を求めなさい。

次に、2つのベクトルのベクトル積を表してみよう。そのためには、単位ベクトル同士のベクトル積を先に求める。

ベクトル積の意味から次の関係は明らかである。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ベクトル積を成分で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

ベクトル積も分配則が成り立つ。

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (3.30)$$

問 ベクトル $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$ と $\mathbf{B} = (3, 2, 1)$ のベクトル積 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を求めなさい。

問 ベクトル $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$ と $\mathbf{B} = (1, 1, 1)$ が張る平面に立てた法線の成分を求め図示しなさい。

3.4 ベクトル関数

次に、ベクトルが何かの変数により次々と変化していく場合を考える。例えば質点の力学で登場する位置ベクトルなどである。位置ベクトルとはある座標系の原点から質点まで引いたベクトルである。時間とともに質点は動いていくので位置ベクトルの矢印は時間と共に、その方向と長さを変える。つまり位置ベクトルは時間と共に変化するのである。こ

のことは、位置ベクトルは時間に対応しているという観点で、時間の関数とみなせる。この場合、関数と言ってもスカラー量ではなくベクトル、つまり矢印である。我々は、スカラー関数について極限や微分係数というものを学んだ。ベクトルをスカラー変数の関数として与える場合、このベクトルに微分を行うことができ、ベクトルとしての極限も考えることができる。力学との関連を考え、独立変数を時間 t というスカラー量とし、ベクトルとして位置ベクトル \mathbf{r} 、速度ベクトル \mathbf{v} 、および加速度 \mathbf{a} を考える。

3.5 ベクトルを微分する

今、図 3.4 に示すように時刻 t における位置ベクトルが \mathbf{r} であり、つまり質点がここにあり、時刻 $t + \Delta t$ で質点の位置が変わり、位置ベクトルが \mathbf{r}' になったとする。この時間内における質点の移動、つまり変位は変位ベクトル

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \quad (3.31)$$

で記述される。この変位ベクトルの簡単な覚えかたは

“終わりの位置ベクトルから初めの位置ベクトルをベクトルの的に引き算をする”
 “質点の初めの位置から終わりの位置まで引いた矢印”

ということである。この変位ベクトルをスカラー量 Δt で割って得られるベクトル

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3.32)$$

を**平均の速度**という。変位ベクトルは質点の初めの位置から終わりの位置へ引いた矢印で表されるので、平均の速度の方向は同様に質点の初めの位置から終わりの位置の方向へ向

いている。大きさは $\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta t|}$ であるので変位の大きさを時間幅で割ったもの、つまり平

均の速度の大きさ、あるいは平均の速さである。

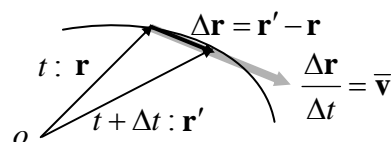


図3.4 変位と平均の速度

さて、時間幅 Δt を無限にゼロに近づけたらこれらの量はどうなるであろうか。 $\Delta t \rightarrow 0$ で

変位 $\Delta \mathbf{r}$ はゼロベクトルに近づく。しかし、 $\Delta \mathbf{r}$ を Δt で割って得られるベクトル $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ はどうであろうか。その方向はしだいに質点の軌道に引いた接線の方へ近づいていくことは作図により直感的に理解できよう。平均速度の大きさ $\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|$ はどのような変化をするだろう

か。変位の大きさ $|\Delta \mathbf{r}|$ は質点の軌道に沿った Δt 間における移動距離 Δs に近づくから、

$\Delta t \rightarrow 0$ においては $\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (つまり、移動した距離をかかった時間で割ったもの) \rightarrow 「時

刻 t における瞬間の速さ」と想定される。ここで、瞬間の速さ、あるいは単に速さとは“移動した距離(道のり)を所要時間で割り、所要時間 $\rightarrow 0$ の極限を取ったもの”である。これらの結果をまとめると、

(1) $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ はベクトルである。これは平均の速度を意味する。このベクトルの大きさは平均の速さであり、ベクトルの方向は変位 $\Delta \mathbf{r}$ の方向である。

(2) $\Delta t \rightarrow 0$ の極限において $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ はあるベクトルに収束する。このベクトルの方向は質点の軌道における接線の方である。このベクトルの大きさは質点の瞬間の速さとして与えられる。

(3) この極限的ベクトルを

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.33)$$

と書き、ベクトル \mathbf{r} を時間 t で微分する、あるいはベクトル \mathbf{r} の時間微分係数という。

これまでは、時間 t の関数として位置ベクトルを扱ってきたが、パラメータは時間でなければならないというわけではない。任意のパラメータ s の関数として位置ベクトル \mathbf{A} が与えられたなら、 s の変化 Δs に対する \mathbf{A} の変化 $\Delta \mathbf{A}$ を描けるわけだから、これを Δs で割って $\Delta s \rightarrow 0$ の極限を取ることで、 \mathbf{A} の s についての微分係数が求まる。この場合も s の変化により、 \mathbf{A} の先端が移動し、軌跡を描き、 \mathbf{A} をパラメータ s で微分することができ、微分の結果として得られるものもベクトルであり、この軌道の接線方向を向いている。ただし、

この場合、 $\frac{d\mathbf{A}}{ds}$ は速度という概念ではなくなる。

次に、具体的に $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ を求める手順を考える。ベクトルの向きは紙の上に矢印を書くことで

なんとなくわかるが、その大きさは紙からはみ出すか、小さすぎて見えないとかの状況になるであろう。ここで適当な座標系を決めてベクトルを成分で与えると表記しやすい。し

たがって、ベクトルを成分表示したときの微分法を考える。いま、 x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} で表し、ベクトル $\mathbf{r}(t)$ の成分を (x, y, z) のように与えるならば、このベクトルは

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (3.34)$$

と書ける。ここでベクトルの各成分は時間の関数であることを明記した。時間が Δt だけ経過したときの位置ベクトルは

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\mathbf{i} + y(t + \Delta t)\mathbf{j} + z(t + \Delta t)\mathbf{k}$$

と表せるので、この時間幅での変位ベクトルは

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \{x(t + \Delta t) - x(t)\}\mathbf{i} + \{y(t + \Delta t) - y(t)\}\mathbf{j} + \{z(t + \Delta t) - z(t)\}\mathbf{k}$$

と表せる。したがって、平均速度ベクトルは

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\{x(t + \Delta t) - x(t)\}}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\{y(t + \Delta t) - y(t)\}}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\{z(t + \Delta t) - z(t)\}}{\Delta t}\mathbf{k}$$

である。これにより、 Δt に具体的な数値を入れれば、変位および平均の速度ベクトルの x, y, z 成分が具体的に計算でき、その方向と大きさも定量的に求めることができる。次に、これを用いて瞬間速度を具体的に求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{x(t + \Delta t) - x(t)\}}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{y(t + \Delta t) - y(t)\}}{\Delta t}\mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{z(t + \Delta t) - z(t)\}}{\Delta t}\mathbf{k} \\ &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.35)$$

つまり、速度ベクトルの x, y, z 成分； v_x, v_y, v_z はそれぞれ $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ 、 $\frac{dz}{dt}$ で与えられる。速度ベクトルの成分が求まれば速度の大きさ、つまり速さは

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (3.36)$$

で与えられる。

ベクトルの高階微分もスカラー関数の場合と同様に与えられる。例えば、位置ベクトルの時間による2階微分は加速度であり、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.37)$$

と表される。

ここで、 v_x, v_y, v_z は速度ベクトル \mathbf{v} の各成分である。デカルト座標系以外の座標系、例えば極座標系でベクトルの時間微分を取り扱う方法と力学への応用については付録で述べた。

このように、ベクトルをパラメータで微分することは、ベクトルの各成分のこのパラメータによる微分係数を求めることで表現されるが、ベクトルを矢印で図示してベクトル微分を図で理解することは、その物理的意味を納得する上で重要である。その例として、2次元で曲線運動をしている質点の加速度を図形的に求めてみよう。図 3.5 に基づいて考える。

ここで、質点の時刻 t と $t + \Delta t$ における速度を \mathbf{v} および \mathbf{v}' とする。このとき、速度ベクトルの変化量 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ を二つのベクトルに分解する。つまり $\Delta \mathbf{v} = (\Delta \mathbf{v})_r + (\Delta \mathbf{v})_t$ とする。この図で \overline{ab} は \overline{ac} と等しく取る。また、今考えている軌道上の微小部分を内接する半径 R の円の弧 (こ) で近似する。 $\Delta O'AB$ は Δabc と相似であり、 \overline{ab} の長さを \mathbf{v} の大きさに取るので

$$R : R\Delta\theta = |\mathbf{v}| : |\Delta \mathbf{v}_r| \text{ である。したがって、} |\Delta \mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}| \Delta\theta \text{ であり、これから } \frac{|\Delta \mathbf{v}_r|}{\Delta t} = |\mathbf{v}| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ であるが、} \Delta t \rightarrow 0 \text{ の極限において } \frac{|\Delta \mathbf{v}_r|}{\Delta t} \rightarrow a_r \text{ (動径方向の加速度成分の意味より) であり、}$$

$$\text{また } |\mathbf{v}| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow |\mathbf{v}| \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R} \text{ であるので (角度 } \Delta\theta \text{ に対応する円周上の微小な弧長を } \Delta s \text{ とする}$$

$$\text{と } \Delta s = R\Delta\theta \text{ であり、} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v \text{ となる。つまり、} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v}{R} \text{ であることを用いた)、}$$

$$\text{これから、} a_r = \frac{v^2}{R} \text{ となる。ここで、} a_r = \left| \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right| \text{ は向心加速度：速度の変化率の向心方向成}$$

分、の大きさであり、 $v = |\mathbf{v}|$ は時刻 t における速度の大きさである。また、 $|\Delta \mathbf{v}_t|$ はベクトル

$$\mathbf{v} \text{ の長さの変化 } \Delta v \text{ である。したがって } \frac{|\Delta \mathbf{v}_t|}{\Delta t} \text{ は } \Delta t \rightarrow 0 \text{ の極限では } \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt} \text{ となる。つまり、}$$

速さの時間微分である。したがって、速度の時間微分；加速度は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_t}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} = a_r \hat{\mathbf{r}} + a_t \hat{\mathbf{t}} \quad (3.38)$$

となることがわかる。ここで、 $\hat{\mathbf{r}}$ と $\hat{\mathbf{t}}$ はそれぞれ接円の中心方向と接線方向を向く単位ベクトルである。

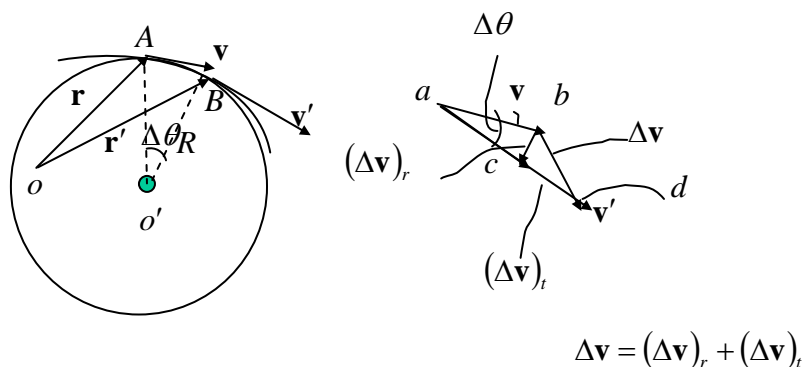


図3.5 加速度の図形的な理解

これによれば、速さが一定で曲線運動しているときは、 $\frac{dv}{dt} = 0$ なので加速度の接線成分は

ゼロであり、加速度は接円の中心方向を向いていて、大きさは $\frac{v^2}{r}$ である。また、速さが変

化する時は、更に速さの変化率 $\frac{dv}{dt}$ で与えられる加速度が接線方向に発生する。この様に、

図形的な理解が物理的なピクチャーを得る助けになる。ベクトル微分の理解があやふやになったときは図を描いてみることを勧める。式(3.32)の解析的な導出は付録で説明されている。さて、次にベクトル微分についての具体例を考える。

大きさが無視できる質量 m の物体を水平方向に初速度 v_0 で発射した。物体には垂直下方に重力 $-mg$ が働く。水平軸を x 、垂直軸を y とし、この運動を解析する。時刻 t におけるこの物体の位置ベクトルは成分表示とベクトル表示でそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(v_0 t, -\frac{1}{2} g t^2 \right) && \text{成分表示} \\ &= v_0 \mathbf{i} - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{j} && \text{ベクトル表示} \end{aligned}$$

速度、加速度はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{d(v_0 t)}{dt}, \frac{d\left(-\frac{1}{2} g t^2\right)}{dt} \right) = (v_0, -gt) && \text{成分表示} \\ &= \frac{d}{dt}(v_0 t) \mathbf{i} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} g t^2\right) \mathbf{j} = v_0 \mathbf{i} - g t \mathbf{j} && \text{ベクトル表示} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dv_0}{dt}, \frac{d(-gt)}{dt} \right) = (0, -g) \quad \text{成分表示}$$

$$= \frac{d}{dt}(v_0)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(-gt) = -g\mathbf{j} \quad \text{ベクトル表示}$$

この例では、物体の描く軌道は上に凸の放物線であり、軌道上の位置に応じて極率半径がある。さらに、速さも次第に大きくなるので、加速度として軌道の法線成分と接線成分があるはずである。この2つの成分を合成すると、加速度の垂直成分のみが結果として形成されている。それが $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$ である。

次の例として、半径 a の円盤が水平面を一定の速度 v_0 で滑らないで転がる場合、円盤の縁に印をつけ、その印の運動を解析する。

水平方向に x 軸を、垂直方向に y 軸をとると、印の位置は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(v_0 t + a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right), a + a \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right) \\ &= \left\{ v_0 t + a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right\} \mathbf{i} + \left\{ a + a \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right\} \mathbf{j} \end{aligned}$$

で与えられるサイクロイド曲線を描く。

この印の速度と加速度はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(v_0 + v_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right), -v_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right) \\ &= \left\{ v_0 + v_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right\} \mathbf{i} + \left\{ -v_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right\} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(-\frac{v_0^2}{a} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right), -\frac{v_0^2}{a} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \right) \mathbf{J} \\ &= -\frac{v_0^2}{a} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \mathbf{i} - \frac{v_0^2}{a} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v_0 t}{a}\right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

で与えられる。

3.6 スカラー積およびベクトル積の時間微分

ベクトル \mathbf{A} および \mathbf{B} があるパラメータの関数であるとき、スカラー積とベクトル積もパラメータの関数となり、そのパラメータによる微分係数はどのように表せるだろうか。ここで、パラメータを時間 t とする。ベクトルを成分で与えると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \frac{d}{dt} (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \frac{da_x}{dt} b_x + \frac{da_y}{dt} b_y + \frac{da_z}{dt} b_z + a_x \frac{db_x}{dt} + a_y \frac{db_y}{dt} + a_z \frac{db_z}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}\end{aligned}\quad (3.39)$$

および、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \frac{d}{dt} \left\{ (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \right\} \\ &= \frac{d}{dt} (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + \frac{d}{dt} (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + \frac{d}{dt} (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{da_y}{dt} b_z + a_y \frac{db_z}{dt} - \frac{da_z}{dt} b_y - a_z \frac{db_y}{dt} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{da_z}{dt} b_x + a_z \frac{db_x}{dt} - \frac{da_x}{dt} b_z - a_x \frac{db_z}{dt} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{da_x}{dt} b_y + a_x \frac{db_y}{dt} - \frac{da_y}{dt} b_x - a_y \frac{db_x}{dt} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{da_y}{dt} b_z - \frac{da_z}{dt} b_y \right) \mathbf{i} + \left(a_y \frac{db_z}{dt} - a_z \frac{db_y}{dt} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{da_z}{dt} b_x - \frac{da_x}{dt} b_z \right) \mathbf{j} + \left(a_z \frac{db_x}{dt} - a_x \frac{db_z}{dt} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{da_x}{dt} b_y - \frac{da_y}{dt} b_x \right) \mathbf{k} + \left(a_x \frac{db_y}{dt} - a_y \frac{db_x}{dt} \right) \mathbf{k} \\ &= \left\{ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_y b_z - \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_z b_y \right\} \mathbf{i} + \left\{ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_z b_x - \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_x b_z \right\} \mathbf{j} + \left\{ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_x b_y - \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_y b_x \right\} \mathbf{k} \\ &\quad + \left\{ a_y \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_z - a_z \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_y \right\} \mathbf{i} + \left\{ a_z \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_x - a_x \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_z \right\} \mathbf{j} + \left\{ a_x \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_y - a_y \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_x \right\} \mathbf{k} \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\end{aligned}\quad (3.40)$$

となる。これらの結果はスカラー関数の積の微分係数

$$\frac{d}{dt} (fg) = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}$$

と同じ形をしている。スカラー積を微分した結果の積の順番は変えても良いが、ベクトル積については積の順序が変わらないように注意する。ベクトル積では積の順番を変えると

－（マイナス）の符号がつく。

これらの結果の適用例を示す。時間の関数として与えられたベクトル \mathbf{A} に対し、

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{A}|^2 = \frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (3.41)$$

と表せる。これを、運動する質点の位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に適用すると、

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}|^2 = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \quad (3.42)$$

が得られるが、もし、質点が円周上を回っていると、等速運動でも不等速運動でもとにかく $|\mathbf{r}|$ は円の半径で一定値なので、その 2 乗を時間微分したものはゼロである。したがって式 (3.36) の左辺がゼロとなり、円運動では位置ベクトルと速度ベクトルは直交しているという良く知られた関係が示されている。また、運動エネルギーを速度ベクトルで表すと $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$ であり、上記の関係を適用すると、運動エネルギーの時間変化率は次のように得られる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{F} \quad (3.43)$$

ここで、質点の加速度 \mathbf{a} と質点に働く力 \mathbf{F} との関係 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ （運動の法則）を用いた。この結果は、運動エネルギーの単位時間当たりの変化率は粒子に働く力と粒子の速度のスカラ一積であることを示す。さらに、微小時間 dt における運動エネルギーの変化量は、上式に dt を掛けて、

$$d \left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 \right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.44)$$

が得られる。これは、運動エネルギーの時間 dt における変化量は、粒子に作用する力が粒子の移動距離 $d\mathbf{r}$ で行う仕事に等しいという結果を与える。さらに、粒子に働く力がポテンシャル関数 $U(x, y, z)$ で与えられるならば、

$$dU(x, y, z) = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.45)$$

の関係がある。これを使えば、(3.38)式と組み合わせると、

$d\left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2\right) = -dU$ より $d\left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U\right) = 0$ となり、結局カッコの中身が一定

ということから
$$\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U = E : \text{一定} \quad (3.46)$$

が得られる。ここで、 E は粒子が持っている全エネルギーであり、運動している間に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和（全エネルギー）が一定であることを示す。

次の応用例は、角運動量の時間微分についてである。粒子が力を受けて運動しているとする。粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ 、運動量を $\mathbf{p}(t)$ 、角運動量を $\mathbf{L}(t)$ とすると、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.47)$$

である。ここで、両辺を時間 t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ここで、 $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$ （運動の法則）を用いた。 \mathbf{N} は力 \mathbf{F} が位置 \mathbf{r} で作用するときの原点回りのトルクである。つまり、**角運動量の時間変化をトルクで与える**ことを示す。さらに、もし力 \mathbf{F} が常に原点方向を向いているなら（中心力という）、ベクトル \mathbf{r} と \mathbf{F} は平行になるので、ベクトル積 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ はゼロとなる。このとき $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ なので**角運動量は時間的に変化しない**、つまり**角運動量は保存する**。

3.7 曲率と曲率半径

ベクトルの微分法を用いることで、曲線の曲率や曲率半径などを求めることができる。今、曲線を与えるパラメータとして時間 t の代わりに曲線に沿った長さ s を使う。曲線に沿った長さをパラメータに使うのは馴染みが薄いかもしれない。しかし、曲線が与えられているなら、例えば質点の位置は曲線上の長さで指定できる。長さを使う利点はいくつかあるが、**長さ（距離）の時間微分が速さを与える**こと、および曲線上を動く質点の微小な変位ベクトルの大きさが近似的に質点がなぞる弧の長さで与えられることなどである。

図 3.6 に示すように、質点がある曲線上を、曲線に沿って微小な長さ Δs だけ移動したとする。これに対応した変位ベクトルは $\Delta \mathbf{r}$ である。このとき、 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ は $\Delta s \rightarrow 0$ の極限においてあるベクトルに収束する。明らかに、この極限ベクトルは長さが 1 である。方向はどうか。方向は曲線の接線方向である。

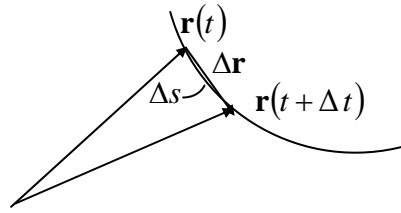


図3.6 変位ベクトルと弧長

つまり、

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (3.49)$$

は曲線の接線ベクトル（大きさが1である）を与える。さらに、次のベクトル

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (3.50)$$

を考えよう。このベクトルは、曲線上の位置が ds だけ変化すると接線の向きがどれだけ変化するかを意味する。つまり、曲線の曲がる割合を意味するので、このベクトルの絶対値をとって曲率という。

$$\text{曲率} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| \quad (3.51)$$

曲率の逆数を曲率半径という。

$$\text{曲率半径} = \frac{1}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|} \quad (3.52)$$

この式が曲率半径として合理的であることは、半径 R の円に適用すると明らかである。

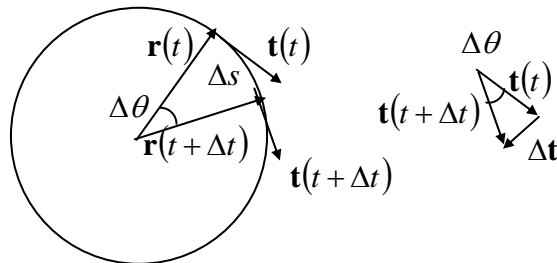


図3.7 接線ベクトルの変化率

実際、図 3.7 に示すように円の一点から円周に沿って Δs だけ移動し、この弧を見込む角度を $\Delta\theta$ とする。接線ベクトルの変化を $\Delta\mathbf{t}$ とするなら、このベクトルはほぼ円の中心方向を向いている。接線ベクトルとその変化だけを抜き出して作図した三角形を参照する。この三角形は円の中心と Δs が作る扇型と近似的に相似である。したがって、接線ベクトルの長さが 1 であることより、 $|\Delta\mathbf{t}| = |\Delta\theta|$ である。弧の長さは $\Delta s = R|\Delta\theta|$ なので

$$\text{曲率} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{1}{R}$$

および、

$$\text{曲率半径} = R$$

となり、確かに円の半径を与える。曲線の一点における曲率と同じ大きさの半径を有する円を**内接する円**という。この円の半径が曲線のその場所における曲率半径とするのは合理的な定義である。次に、いくつかの曲線について接線ベクトルと曲率半径を求めてみよう。このままの式の形では具体的な計算には不向きなので式を実用的な形式に変形する。まず、曲線を与える独立変数（パラメータ）を x とし、 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ の表現を変える。 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ とする。また微小弧長 ds は

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.53)$$

と表されるので、接線ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \quad (3.54)$$

これから、ベクトルの方向の x 軸からの傾きは (y 成分 / x 成分) であることを利用すると、ベクトル \mathbf{t} の方向は x 軸に対し $\frac{dy}{dx}$ の傾きを持つ。これは曲線の接線の傾きである。また、

(3.54) 式から $|\mathbf{t}|^2 = 1$ が得られるので、 \mathbf{t} は曲線の接線方向を向く長さが 1 のベクトルであることが確認できる。

次に曲率ベクトルを求める。

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d(d\mathbf{r}/ds)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} dx \left(d\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right), d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} dx \left(\left(-\frac{y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \left(\frac{y''\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} \right) \right) \\
&= \left(-\frac{y'y''}{(1+y'^2)^2}, \frac{y''(1+y'^2) - y'^2 y''}{(1+y'^2)^2} \right) = \frac{1}{(1+y'^2)^2} (-y'y'', y''(1+y'^2) - y'^2 y'')
\end{aligned} \tag{3.55}$$

したがって、曲率ベクトルの大きさを求めると、

$$\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \frac{1}{(1+y'^2)^2} \sqrt{(y'y'')^2 + \{y''(1+y'^2) - y'^2 y''\}^2} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.56}$$

であり、曲率半径は次のように求まる。

$$\text{曲率半径} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{3.57}$$

曲線を曲座標で表す場合の接線と曲率を与える表現を求める。極座標で曲線を表すことは、曲線上の点の位置を動径 r と偏角 θ の組み合わせ (r, θ) で与え、動径は偏角の関数 $r = r(\theta)$ であるとする。独立変数 θ と θ による微分係数で表すためには上記の $\frac{dy}{dx}$ および

$\frac{d^2y}{dx^2}$ を r と θ により表せば良い。

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \tag{3.58}$$

より、

$$dx = \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) d\theta \quad \text{および} \quad dy = \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \right) d\theta \tag{3.59}$$

したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta} \tag{3.60}$$

を用いて

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}, \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}} \right) \quad (3.61)$$

が得られる。

次に、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta / \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta\right)}{\left(\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta\right) d\theta} \quad (3.62)$$

であるが、ここで、 θ は独立変数であり、 r は θ の関数 $r(\theta)$ であることに注意してちょっと計算すると

$$d\left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta / \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta\right) = \frac{-r \frac{d^2 r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}{\left(\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta\right)^2} d\theta \quad (3.63)$$

であるから、最終的に曲率半径は

$$\text{曲率半径} = \frac{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-r \frac{d^2 r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \quad (3.64)$$

と表される。

これらの表式は $d\mathbf{r}$ として上述の (3.58) 式、つまり r と θ による表示を使い、

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (3.65)$$

を用いることで x 、 y を通過せずに直接求めることもできる。

次に、いくつかの曲線についてこれらの結果を適用する。

- 例1. 半径 a の円：極座標を用いて $\frac{dr}{d\theta} = \frac{d^2 r}{d\theta^2} = 0$ および $r = a$ となる。これらをを代入することで、曲率半径として a を得る。さらに、 x 軸を切るところ ($r = a$ 、 $\theta = 0$)

および、 y 軸を切るところでの接線ベクトルの成分はそれぞれ、 $(0,1)$ および $(1,0)$ である。

例2. 放物線 $y = x^2$: $y' = 2x$ および $y'' = 2$ なので、 $x = 0$ の原点での曲率半径は $1/2$, である。また、原点と $x=1$ における接線ベクトルの成分はそれぞれ $(1,0)$ および $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ である。放物線の曲座標表示 $r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ を使っても同じ結果を得る。

例3. アルキメデスのラセンは $r = C\theta$ で与えられる。 $\frac{dr}{d\theta} = C$ および $\frac{d^2r}{d\theta^2} = 0$ であるから、

曲率半径 $= \frac{\{C^2 + r^2\}^{\frac{3}{2}}}{2C^2 + r^2}$ である。特に、 $\theta = 0$ では $r = 0$ であるので、曲率半径は $\frac{C}{2}$ で

ある。

例4. オイラーの対数ラセンは $r = e^\theta$ で与えられる。 $\frac{dr}{d\theta} = e^\theta$ および $\frac{d^2r}{d\theta^2} = e^\theta$ であるので、曲率半径は $\sqrt{2}e^\theta$ であり、指数関数的に増大する。